resultats que en depenien. Així s'ha creat un cos teòric enorme de resultats que s'esmicolarien si el lema fonamental resultés ser fals.

Ngô Bao Châu fou qui finalment resolgué el problema obert. Les complicades identitats del lema fonamental que va obtenir poden ser vistes sorgint de manera natural dels sofisticats objectes matemàtics coneguts com a *fibracions de Hitchen*. El seu enfocament fou totalment nou i inesperat: les fibracions de Hitchen són objectes purament geomètrics propers a la física matemàtica, gairebé l'última cosa que s'esperava que pogués ser rellevant per a aquest problema, en la part més pura de la matemàtica pura.

Va esdevenir ràpidament evident que Ngô havia trobat una profunda connexió. El seu enfocament va convertir la complexitat molesta i incòmoda del lema fonamental en una senzilla i natural afirmació sobre fibracions de Hitchen. Fins i tot, abans de completar la seva prova, ja havia aconseguit una cosa encara més impressionant: generar una veritable comprensió sobre el tema.

A més, posant el problema en aquest marc molt més general, Ngô es va dotar de noves i poderoses eines per a l'assalt definitiu. El 2004, va provar alguns casos especials importants i difícils treballant amb el seu exdirector de tesi, Laumon Gérard. I el 2008, utilitzant els seus mètodes nous, resolgué el problema en tota la seva generalitat.

Els mètodes de Ngô són tan nous que els matemàtics esperen que serviran per a tractar també altres problemes oberts. Un primer objectiu és una altra peça del programa de Langlands, la seva *teoria de l'endoscòpia*.

Les seves tècniques fins i tot podrien assenyalar el camí cap a una possible prova completa del principi de functorialitat, que estaria ben a prop d'una plena realització de la visió original de Langlands. Langlands mateix, que té prop de setanta anys i encara està plenament actiu matemàticament, ha desenvolupat un enfocament altament especulatiu, però a l'hora atractiu, per al problema. No està encara gaire clar que aquestes idees puguin portar a una prova completa, però si ho fan, hauran de recolzar en les idees geomètriques que Ngô ha introduït.

Julie Rehmeyer

Stanislav Smirnov, Universitat de Ginebra, Suïssa

For the proof of conformal invariance of percolation and the planar Ising model in statistical physics.

Stanislav Smirnov ha posat una base matemàtica molt ferma a una àrea emergent de la física matemàtica. Ha donat demostracions elegants de dues conjectures antigues i fonamentals de la física estadística, i ha trobat simetries sorprenents en models matemàtics de fenòmens físics.

Tot i que el treball de Smirnov és molt teòric, està relacionat amb algunes preguntes sorprenentment pràctiques. Per exemple, quan l'aigua pot fluir a través del sòl i quan és bloquejada? Per tal que flueixi, els porus a petita escala han d'estar units formant un canal continu d'un lloc a un altre. Aquesta és una qüestió clàssica de la física estadística, perquè el comportament a gran escala d'aquest mateix sistema (si l'aigua pot fluir a través d'un canal continu de porus) és determinat per la seva versió a petita escala, el comportament probabilístic (la probabilitat que en un punt donat del sòl, hi hagi un porus).

També és una pregunta natural modelar-ho matemàticament. Imaginem que cada punt del sòl és un punt d'un reticle, i li assignem el color blau si l'aigua pot fluir i el groc si no pot. Determinem el color de cada punt amb el llançament d'una moneda ponderada (cares per al groc, creus per al blau). Si un camí de punts blaus creua d'un costat a l'altre d'un rectangle, l'aigua pot passar d'aquest costat a l'altre.

Aquests *models de percolació* es comporten d'una manera remarcable. Per als valors extrems, el seu comportament és com hom espera: si la moneda està fortament ponderada en contra del blau, l'aigua gairebé amb tota seguretat no podrà circular, i si està fortament ponderada

cap al blau, és gairebé segur que l'aigua circularà. Però la probabilitat que hi hagi circulació no canvia de manera uniforme a mesura que el percentatge de punts blaus augmenta. És gairebé segur que l'aigua estarà bloquejada mentre el percentatge de punts blaus sigui inferior a un cert llindar, i un cop se sobrepassa, la probabilitat que l'aigua flueixi comença a créixer. Aquest valor llindar s'anomena el *punt crític*. Aquest canvi brusc de comportament és similar al que succeeix a l'aigua quan s'escalfa: de sobte, a una temperatura crítica, comença a bullir. Per aquesta raó, aquest fenomen s'anomena una *transició de fase*.

Però, és evident que els sòls reals no són perfectes, amb els porus uniformement espaiats horitzontalment i verticalment. Per tant, per aplicar aquest model al món real, ens sorgeixen un parell de qüestions problemàtiques. En primer lloc, quant fina ha de ser la malla reticular que considerem? Els físics estan principalment interessats en la comprensió dels processos a escala molecular, en aquest cas la malla ha de ser, certament, molt fina. Els matemàtics a continuació es pregunten per les relacions entre models amb malles cada vegada més fines. La seva esperança és que, a mesura que aquestes es facin més i més fines, els models s'aproparan a un model únic que té en efecte una xarxa infinitament fina, anomenat *scaling limit*.

Per veure per què no és obvi que l'*scaling limit* existeixi, imagineu que elegim un percentatge determinat de punts blaus de la malla, i que calculem la probabilitat que els porus s'alineïn permetent a l'aigua creuar d'un costat a l'altre. Ara reduïm la mida de la malla i ho tornem a calcular. A mesura que la malla es fa més i més fina, les probabilitats que l'aigua creui pot ser que es vagin apropant a un cert nombre, de la mateixa manera que els números 1,9, 1,99, 1,999, 1,9999... s'acosten cada vegada més a 2. En aquest cas, aquest nombre serà la probabilitat de creuament per l'*scaling limit*. Però és també imaginable que les probabilitats de creuament vagin saltant i mai no convergeixin cap a un límit concret, com la seqüència de números 2, 4, 2, 4, 2, 4... En aquest cas, la probabilitat de creuament per l'*scaling limit* hauria de ser 2 o 4? No hi ha una resposta bona, així que hem de dir que el *scaling limit* no existeix.

Una altra qüestió potencialment problemàtica és la forma que ha de tenir la malla. Fins i tot si ens restringim a dues dimensions, hi ha moltes opcions: malles quadrades, malles triangulars, malles ròmbiques... La ideal seria que el model fos universal, de manera que l'elecció de la forma de la malla no importés, però això, òbviament, no és cert.

Els físics estan bastant convençuts que cap d'aquests potencials problemes és dolent. Usant la intuïció física, han argumentat de manera convincent que el model efectivament convergirà a un *scaling límit* ben definit, a mesura que la malla es fa fina. D'altra banda, encara que l'elecció de la forma de la malla afecti el punt crític, els físics s'han convençut que no afectarà la majoria de les propietats en què estan interessats.

Els físics han descobert més coses sobre malles bidimensionals, incloent certes evidències d'una sorprenent i bonica simetria. Imaginem una malla de qualsevol forma i estirem-la o encongim-la, però sense modificar els angles. La projecció de Mercator del globus terraqüi n'és un exemple: Groenlàndia queda enorme ja que les distàncies es modifiquen, però les línies de latitud i longitud romanen en angle recte. Els físics s'han convençut que si es transformen models de percolació bidimensionals d'aquesta manera, no canviaran els seus *scaling limits* (sempre que s'estigui a prop dels punts crítics). O, emprant termes tècnics, estan convençuts que els *scaling limits* són invariants conformes.

El 1992, John Cardy, un físic de la Universitat d'Oxford, utilitzà aquest fet per aconseguir un dels grans objectius de la teoria de la percolació: una fórmula precisa que calcula les probabilitats de creuament dels *scaling limits* de malles bidimensionals a prop del punt crític. L'únic problema era que, si bé els seus arguments físics semblaven força convincents, ni ell ni ningú més pogué convertir aquesta intuïció física en una demostració matemàtica.

El 2001, Smirnov va posar tota aquesta teoria física sobre una base matemàtica ferma. Va demostrar que els *scaling limits* són invariants conformes, encara que només per a malles triangulars (la forma en què els penics, per exemple, cauen de manera natural quan els posem sobre una taula molt junts). En el procés, també va demostrar la fórmula de Cardy per a malles triangulars. La seva prova utilitzà un enfocament independent dels usats anteriorment pels físics i proporcionà unes perspectives noves i fonamentals. Fins i tot va cobrir un pas

crític que mancava en la teoria de l'evolució de Schramm-Loewner, un mètode important recentment desenvolupat en física estadística.

En un altre èxit important, Smirnov utilitza mètodes similars per a entendre el model d'Ising, que descriu fenòmens com el magnetisme, el moviment dels gasos, el processament d'imatges o l'ecologia. Exactament igual que amb la percolació, els comportaments a gran escala d'aquests fenòmens estan determinats pel seu comportament probabilístic a petita escala. Considerem, per exemple, el magnetisme: els àtoms en un tros de ferro es comporten com imants en miniatura, amb els electrons que es mouen al voltant del nucli i creen un camp magnètic en miniatura. Els àtoms intenten atreure els seus veïns cap a la seva pròpia alineació. Quan suficients àtoms tenen els seus pols nord apuntant cap a la mateixa direcció, el ferro en el seu conjunt es magnetitza. Els matemàtics modelitzen això mitjançant la col·locació dels àtoms en els nodes d'una malla, amb regles estadístiques que determinen quan estan alineats amb els pols nord apuntant cap amunt o cap avall.

Igual que el model de percolació, el model d'Ising pateix també una transició de fase: a mesura que s'escalfa el ferro, els àtoms vibren més ràpidament, i si s'escalfa per sobre d'un cert punt, les vibracions són tan fortes que els àtoms veïns de sobte deixen d'estar alineats els uns amb els altres i la peça en conjunt comença a perdre el seu magnetisme.

Les mateixes preguntes que preocupen els matemàtics i els físics en percolació s'apliquen també al model d'Ising. La malla ha de ser molt fina, ja que s'està operant al nivell atòmic. Així doncs, a mesura que la malla es fa més i més fina, el model convergeix cap a una versió infinitament fina, un *scaling limit*? D'altra banda, com afecta la forma de la malla al punt crític i a altres propietats? I què passa si estirem o encongim la malla sense canviar els angles, canvia l'*scaling límit*?

Per a aquest model, també, Smirnov va ser capaç de demostrar que els models convergeixen cap a un *scaling limit* a mesura que la malla es fa més fina, i que no es veuen afectats per estiraments o encongiments, és a dir, que són invariants conformes. Després, juntament amb Dmitry Chelkak, va establir la universalitat, estenent els resultats a una àmplia gamma de malles. També ha fet un treball important en anàlisi i sistemes dinàmics. La seva obra seguirà enriquint les matemàtiques i la física en el futur.

Julie Rehmeyer

Cédric Villani, École Normale Supérieure de Lyon, França

For his proofs of nonlinear Landau damping and convergence to equilibrium for the Boltzmann equation.

Cédric Villani ha creat una profunda base matemàtica per a una gran varietat de fenòmens físics. Al centre de gran part de la seva obra s'hi troba la seva profunda interpretació matemàtica del concepte físic d'*entropia*, que ha aplicat per solucionar grans problemes inspirats en la física. A més, els seus resultats han alimentat de nou les matemàtiques, enriquint ambdós camps, a través de la connexió.

Villani va començar la seva carrera matemàtica reexaminant una de les teories més impactants i controvertides de la física del segle XIX. El 1872, Ludwig Boltzmann va estudiar què passa quan es treu el tap d'un recipient ple de gas i el gas s'estén per tota l'habitació. Boltzmann va explicar el procés mitjançant el càlcul de la probabilitat que una molècula de gas estigui en un lloc determinat amb una velocitat particular, en qualsevol moment en particular —abans que la teoria atòmica de la matèria fos àmpliament acceptada. I és més impactant encara que la seva equació creés una *fletxa del temps*.

La qüestió era la següent: quan les molècules reboten entre si, les seves interaccions són regulades per les lleis de Newton, que són perfectament reversibles en el temps; és a dir, en principi, es podria aturar el temps, enviar totes les molècules endarrere en les direccions de les quals provenen, i es comprimirien de nou dins el recipient. Però, l'equació de Boltzmann no és reversible en el temps. Les molècules gairebé sempre van d'un estat de major ordre (per exem-